



APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO NA ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM PLACAS COM MÚLTIPLOS ORIFÍCIOS CIRCULARES SUBMETIDAS À FLEXÃO LONGITUDINAL

ROGER LEMOS DECARLI, LUCIANO DE OLIVEIRA CASTRO LARA

Universidade Federal do Espírito Santo (UFES)

Departamento de Engenharia Mecânica (DEM)

Av. Fernando Ferrari, 540, Bairro Goiabeiras, 29075-910, Vitória, ES - Brasil

(Recibido 14 de diciembre de 2018, revisado 3 de marzo de 2019, para publicación 11 de junio de 2019)

Resumo – Este trabalho visa o estudo de distribuição de tensões em placas com múltiplos orifícios circulares, em situações que a obtenção de solução analítica ou experimental é inviável devido à complexidade e custo da mesma. Convergência de malhas e de pontos de Gauss não está incluída nesse estudo. Serão feitas diversas análises em placas com configurações variáveis de múltiplos orifícios, dispostos de maneira ordenada na placa. Como resultados são esperados: Distribuição de tensões para diferentes configurações de orifícios circulares, comparativos com soluções pré-existentes e obtenção de curvas de tendência que descrevam o comportamento das distribuições em casos extremos.

Palavras-chave – Concentração de tensão, placas com múltiplos orifícios, análise computacional de placas.

1. INTRODUÇÃO

Irregularidades de forma tais como buracos, cavidades e rachaduras são aqui referidas como descontinuidades geométricas e são levadas em consideração pela introdução do conceito de concentração de tensão.

A introdução de orifícios, entalhes e rasgos em elementos de máquinas, equipamentos e peças em geral, é procedimento comum, visando atender necessidades funcionais destes. Entretanto, a presença dessas irregularidades de forma não apenas diminui a área resistente dos componentes, como promove a ampliação do campo de tensões no seu entorno, demandando atenção especial do projetista quanto a sua resistência estrutural nesses casos.

O problema da placa com orifício aparece como um dos exemplos mais comuns no estudo de fatores de concentração de tensão, ilustrando diversos conceitos envolvidos.

A placa com orifício aparece na engenharia em vigas com redes de furos, na costela de asas de avião e sistematicamente em outras aplicações, seja visando à redução de peso na estrutura ou a adaptação e funcionalidade de elementos estruturais, seja para passagem de fiação ou de dutos de qualquer natureza. Neste âmbito, é essencial conhecer o efeito de tais furos no comportamento geral da estrutura, de modo a possibilitar um dimensionamento ideal para condições de trabalho especificadas.

Existe um grande número de pesquisas que investigam o comportamento mecânico de placas com orifício, sendo uma das principais preocupações a avaliação dos fatores de concentração de tensão [1-10].

Amplamente estudado, muitos dos problemas de concentração de tensões foram analisados através dos métodos matemáticos da teoria da elasticidade [11,12], permitindo levantarem-se importantes relações entre as dimensões da peça e do entalhe, resultando em um correspondente fator para a elevação de tensões. Soluções analíticas e resultados experimentais obtidos por métodos complexos como o estudo de concentração de tensões por método fotoelástico fazem parte dessas pesquisas. Apesar dos esforços de pesquisadores [13,14], os quais buscam soluções exatas para tensões, deformações e deslocamentos de uma placa

retangular com um orifício circular submetida a um momento de flexão, usando, por exemplo, a função de tensão de Airy. Ainda existe uma grande limitação no processo de obtenção da solução analítica nos casos em que a geometria do corpo é mais complexa. Praticamente a totalidade das tabelas específicas de valores de concentração de tensões foram construídas a partir de fontes como Ryan e Fischer [2] e Frocht e Leven [15] onde um esforço considerável de pesquisa foi despendido no desenvolvimento e aplicação de métodos fotoelásticos, com relativo êxito.

Com o crescimento em disponibilidade e propósito de métodos computacionais para análise estrutural, métodos experimentais vêm sendo deixados de lado, dando lugar a extensivas análises com detalhados resultados [7], de forma que, as respostas encontradas através dos estudos teóricos e experimentais de placas foram corroboradas através de pesquisas que empregam a solução numérica e a aplicação de métodos de análise computacional de placas.

Dentre os vários métodos discretos que foram utilizados para a avaliação dos fatores de concentração de tensão, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) apresenta diversas vantagens em relação a outros métodos como o método de elementos finitos (FEM), mais utilizado para os problemas de placas com furo circular. O Método dos Elementos de Contorno destaca-se dos demais métodos computacionais por ser uma técnica de contorno e não de domínio como as demais [16]. Segundo Cheng e Cheng [17], o Método dos Elementos de Contorno pode ser utilizado como referência a todos os métodos numéricos para resolução de equações diferenciais em que se consegue reduzir a malha do domínio para uma malha no seu contorno. Neste contexto e ao longo dos anos, foram produzidos inúmeros trabalhos relativos ao método [17]. Cheng e Cheng [17] apresentam em seu trabalho a evolução do MEC desde os primeiros progressos na Teoria do Potencial, passando pelas Fórmulas de Green até chegar às formulações integrais, características do método. Desta forma, para aplicação computacional em problemas compostos por variáveis espaciais, o processo de discretização só se faz necessário no contorno.

Neste trabalho será avaliado o problema da placa finita com diversos orifícios circulares de centros igualmente espaçados, posicionadas sobre um dos eixos, e submetida a flexão longitudinal, conforme exemplo representado na Fig. 1, utilizando o Método dos Elementos de Contorno. Trabalhos anteriores [18] validam o uso do método para a análise desse caso, com resultados concordantes com a literatura [7].

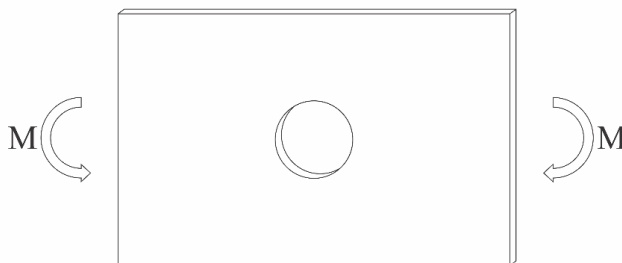


Fig. 1. Placa com orifício circular em flexão longitudinal.

2. O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

A partir de meados dos anos de 1970 o MEC passou por uma evolução. A publicação de Brebbia e Walker [16] contribuiu para popularizar o método e suas aplicações em problemas de engenharia. O Método dos Elementos de Contorno transforma um modelo matemático formulado por equações diferenciais parciais - que descrevem matematicamente o problema físico num domínio espacial e temporal - em equações integrais envolvendo somente valores de contorno e/ou condições iniciais. No contexto da Teoria das Equações Integrais, pode-se realizar essa transformação através do emprego do Teorema de Divergência e apoio de funções auxiliares denominadas soluções fundamentais, desde que as características dos operadores diferenciais viabilizem tais procedimentos. Mas também é possível realizar tal transformação através do estabelecimento de uma sentença consistente do Método dos Resíduos Ponderados [16], na qual as soluções

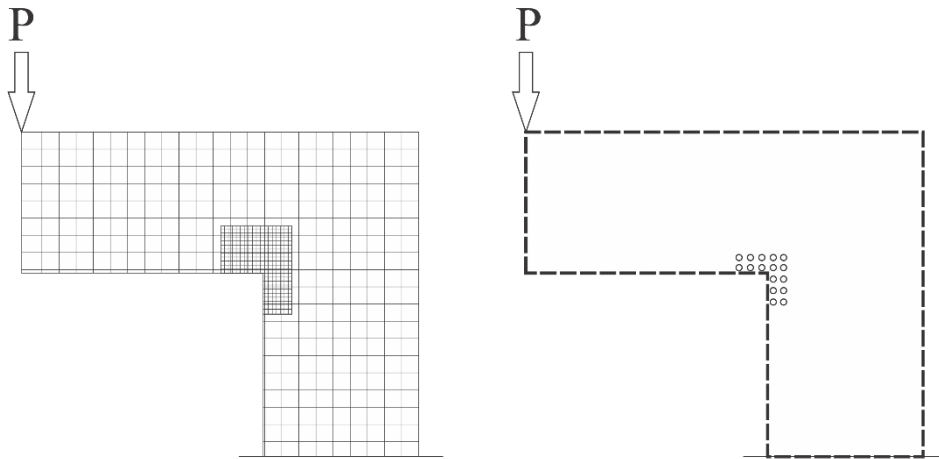


Fig. 2. Discretização MEF vs. MEC.

fundamentais fazem o papel de funções de ponderação. Estas nada mais são do que funções que podem ou não ser diferenciáveis, mas satisfazem a equação diferencial parcial de alguma forma bem definida.

A metodologia envolvida também elimina a necessidade de definir uma estrutura de dados demasiadamente complicada, de modo que a discretização em relação a sua contraparte nos elementos finitos também é simplificada, como exemplificado na Fig. 2.

No caso da elasticidade linear em um sistema 2-D, têm-se como ponto de partida a equação de Navier, especialmente conveniente para casos onde as condições de contorno de deslocamento são conhecidas, que tem a seguinte forma [19]:

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,kj} + b_j = 0 \tag{1}$$

Definindo-se conceitualmente duas porções da superfície Γ_1 e Γ_2 , onde os deslocamentos e as forças de superfície são especificadas respectivamente, de tal maneira que a superfície externa total Γ seja a soma das duas, é possível escrever a expressão dos resíduos ponderados da forma:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j} + b_k)u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k)u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k)p_k^* d\Gamma \tag{2}$$

Integrando por partes o primeiro termo da (2) duas vezes, levando em consideração a equação constitutiva para tensão-deformação e suas propriedades, se chega ao seguinte resultado:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j}^*)u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_k^* d\Gamma . \tag{3}$$

É possível provar a partir da integração da relação constitutiva que [19]:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j}^*)u_k d\Omega = - \int_{\Omega} b_k^* u_k d\Omega \tag{4}$$

Ao assumir que a componente b_k^* trata-se de uma força pontual aplicada em um ponto $\xi \in \Omega$, chamado de ponto fonte, ela pode ser representada pela função delta de Dirac, sendo assim:

$$b_j^* = \Delta(\xi, x)e_j \tag{5}$$

A propriedade da função delta de Dirac da integral do produto permite avaliar o segundo termo da (4), obtendo-se:

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = u_i(\xi) e_i. \quad (6)$$

Como consideração final, a última parcela do segundo termo é igual a zero, pois forças de corpo não são levadas em consideração nessa análise. Então, a (3) finalmente pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x). \quad (7)$$

Esta expressão é conhecida como a identidade de Somigliana para deslocamentos. Os termos com asterisco correspondem às soluções fundamentais que também são soluções da equação de Navier para o caso em que o termo correspondente a forças de corpo na Eq. (1) trata-se de uma força pontual, podendo ser representada pela função delta de Dirac. As soluções fundamentais podem ter diferentes formatos dependendo do tipo de região e modelo utilizado. Para o problema bidimensional e exposto a uma força unitária pontual, de domínio e superfície infinitos, as soluções de Kelvin são apresentadas na literatura [19]:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)G} \{(3 - 4\nu)\delta_{ij} + r_i r_j\}. \quad (8)$$

$$p_{ij}^*(\xi, x) = \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \{[(1 - 2\nu)\delta_{ij} + \beta r_i r_j] \frac{\partial r}{\partial n} - (1 - 2\nu)(r_i n_j - r_j n_i)\}. \quad (9)$$

A identidade de Somigliana é uma representação contínua dos deslocamentos em qualquer ponto pertencente ao domínio, de modo que a tensão pode ser obtida diferenciando dita identidade. Porém, não é possível obter soluções satisfatórias com ela a menos que todos os deslocamentos e forças de superfície no contorno sejam conhecidos [19]. Para o caso limite, com os pontos fonte sobre o contorno, a identidade de Somigliana se torna:

$$\int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x). \quad (10)$$

Onde o coeficiente introduzido $c_{ij}(\xi)$ é dependente da geometria e suavidade do local onde o ponto fonte é colocado, permitindo a introdução de pontos fontes não só dentro do domínio, mas em sua fronteira e também fora dele, além de possibilitar o estudo de contornos não suaves.

Em resumo, o método consiste na discretização do contorno, modelagem das condições de contorno, aplicação da (10) na solução dos pontos no contorno, aplicação da (7) para pontos internos e aplicação da (11) diferenciada para obtenção das tensões no domínio, onde se deseja. O resultado da diferenciação segue [19]:

$$\int_{\Gamma} p_{ijk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x). \quad (11)$$

3. VALIDAÇÃO DE RESULTADOS

Apesar de altamente conveniente, a utilização de métodos numéricos para solução de problemas de modo geral deve ser acompanhada de bastante cautela. Sempre que houver a possibilidade, os resultados devem ser respaldados em dados conhecidos e consolidados, de modo a assegurar confiança do método e dos novos dados.

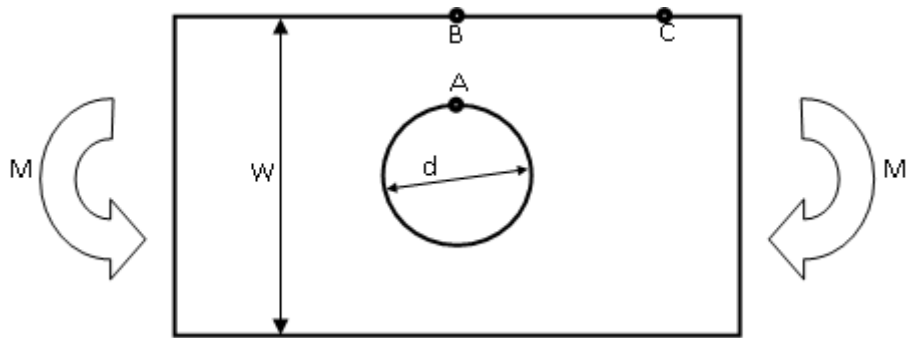


Fig. 3. Placa com orifício circular sob flexão longitudinal mostrando os locais onde foram obtidas as tensões que deram origem aos fatores de concentração K_{tg} , K_{tn} , K'_{tn} .

O problema da placa com orifício circular é um caso específico amplamente estudado, sendo oferecidos inúmeros resultados em literatura relacionada [1-10]. Neste contexto, tem-se no estudo dos fatores de concentração de tensão uma maneira simples de se validar resultados obtidos por meio do método dos elementos de contorno, que foi utilizado no presente trabalho. Foram utilizados 3 fatores de concentração distintos, pertinentes ao caso estudado, são eles K_{tg} , que é avaliado como a razão entre a tensão máxima (posição A mostrada na Fig. 3) e a tensão nominal, em local não afetado pelo entalhe (posição C mostrada na Fig. 3); K_{tn} , que é avaliado de maneira similar a primeira, com a tensão nominal avaliada na seção resistente, no limite do entalhe (posição A mostrada na Fig. 3) e K'_{tn} , também avaliado como o anterior, mas com a tensão nominal lida no limite da placa (posição B mostrada na Fig. 3), ainda na seção resistente. Peterson [20] define e apresenta valores para os três tipos de fatores de concentração de tensão.

Por se tratar de um caso mais geral e que conta com diversas peculiaridades, a placa com orifício circular centralizado como na Fig. 4 foi analisada utilizando o método dos elementos de contorno que foi aplicado no presente trabalho. O carregamento é aplicado de modo a criar situação de flexão na placa. Para efeitos da simulação numérica, o problema é considerado em estado plano de tensões e os elementos utilizados são isoparamétricos lineares.

Comparando-se com diferentes tipos de fatores de concentração de tensão existentes na literatura [20] para este caso singular, os resultados apresentados em trabalho anterior [18] contam com precisão satisfatória, apesar de sofrerem desvios para razões entre altura e diâmetro do orifício mais elevadas, como mostrado na Fig. 5.

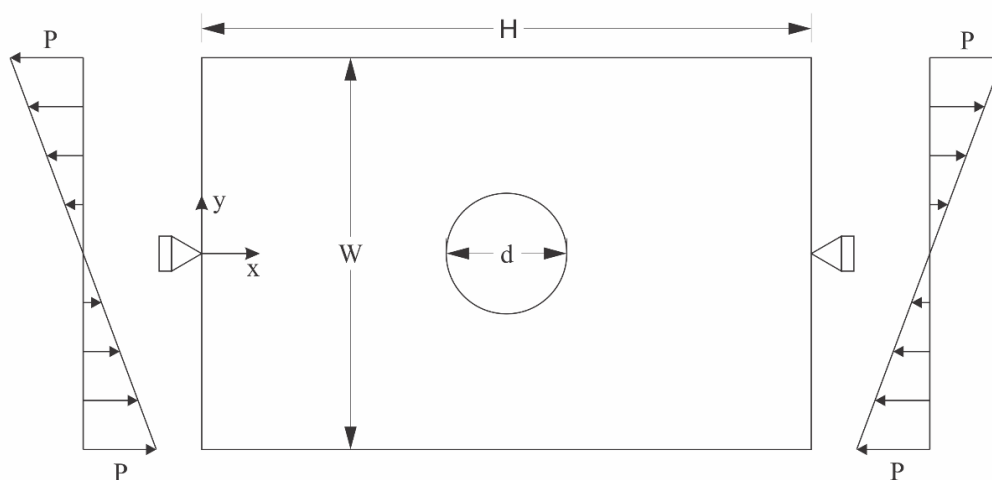


Fig. 4. Modelagem do problema da placa com orifício circular sob flexão longitudinal.

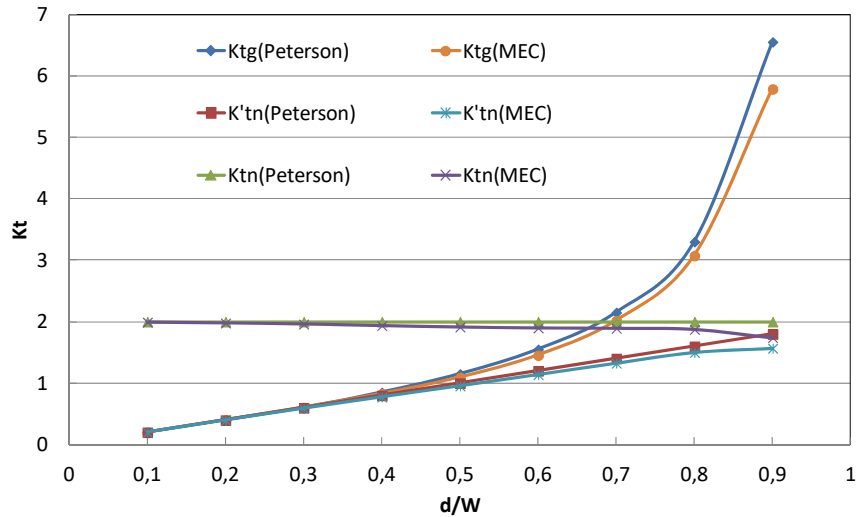


Fig. 5. Comparação entre resultados obtidos pelo MEC e Literatura [18].

É possível não só atestar o método por intermédio de comparação de fatores estabelecidos como também revelar fatos interessantes sobre o caso em análise. O comportamento e ocorrência das máximas tensões em diferentes locais, como na seção resistente, superfície superior da placa ou ao longo do orifício vem a reforçar a necessidade de estudos detalhados antes do emprego de estrutura física geometricamente similar [18].

4. SIMULAÇÃO E RESULTADOS

Para o presente trabalho, foram avaliados os casos de placas retangulares com orifícios circulares múltiplos, dispostos com centros igualmente espaçados horizontalmente no centro da placa, mostrados na Fig. 6, submetidos às condições de contorno mostradas anteriormente na Fig. 4. Onde a razão $H/W=2$ e a razão entre a área dos orifícios e a área da placa permanecem constantes (razão de 0,19) em todos os casos. Para o caso de orifício único, duplo, triplo e quádruplo, a razão entre o diâmetro d do orifício e a altura W da placa são de 0,7, 0,5, 0,4 e 0,35 respectivamente.

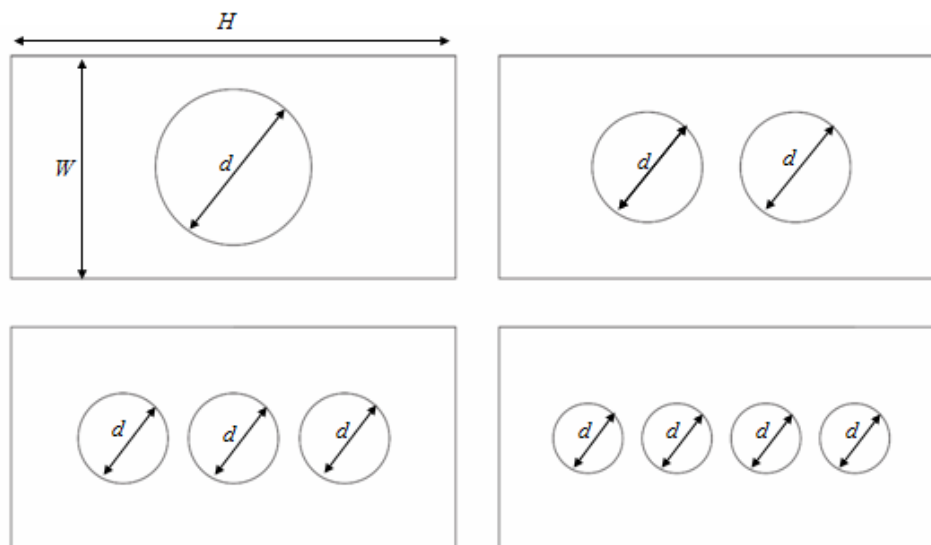


Fig. 6. Representação dos casos estudados em escala.

As malhas utilizadas têm características similares. Elas contam com 148 pontos discretizando a superfície exterior, incluindo 4 pontos duplos nos vértices, 76 pontos em cada orifício igualmente espaçados ao longo da circunferência e 39 pontos imediatamente acima de todos os orifícios, nas seções resistentes subsequentes, observado na Fig. 7.

Os resultados obtidos são apresentados nos gráficos seguintes, para cada caso estudado (Figuras 8 a 13).

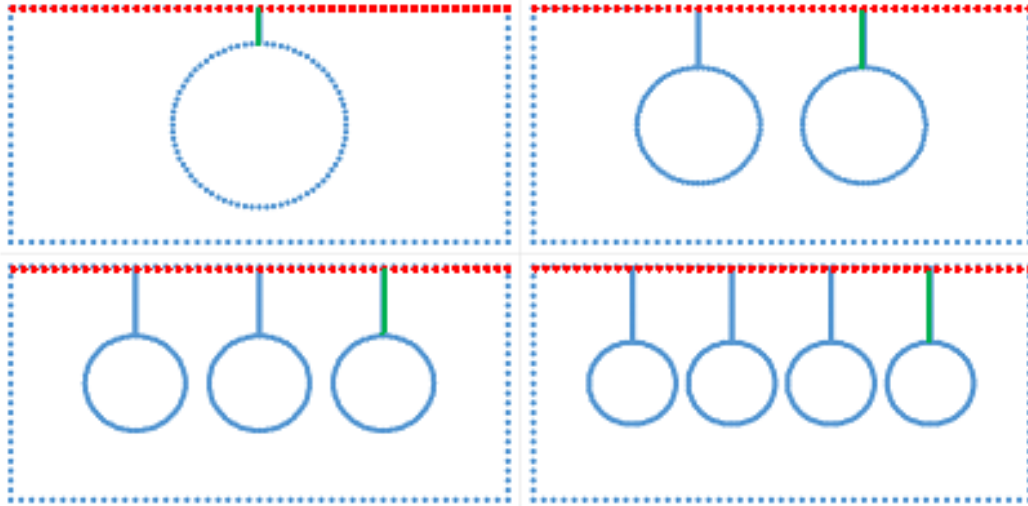


Fig. 7. Representação dos nós das malhas utilizadas.

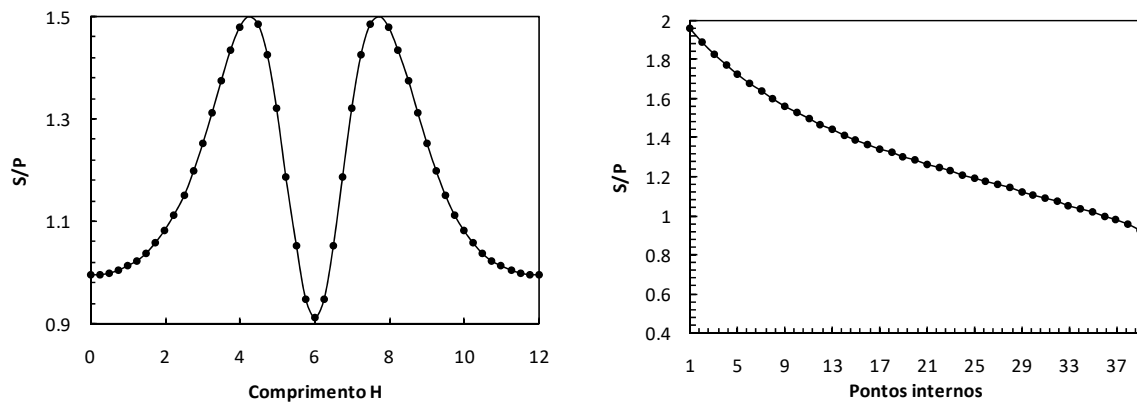


Fig. 8. Resultados para 1 orifício.

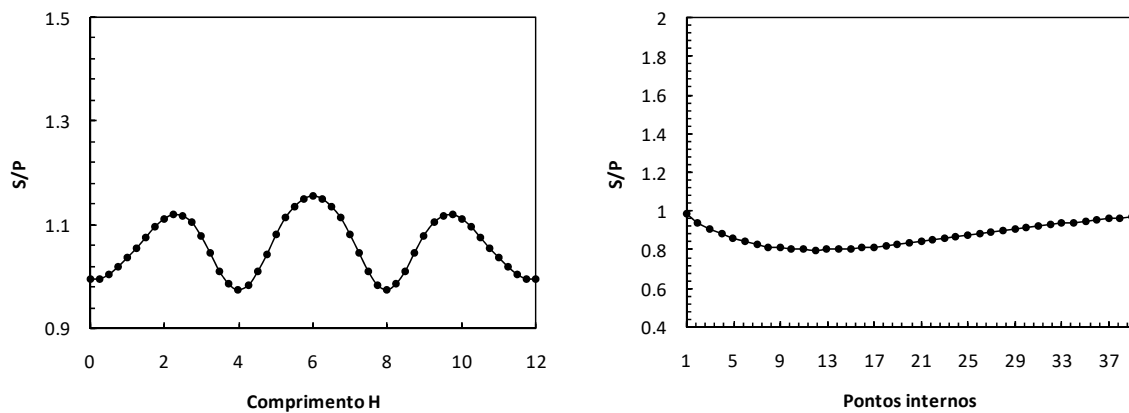


Fig. 9. Resultados para 2 orifícios.

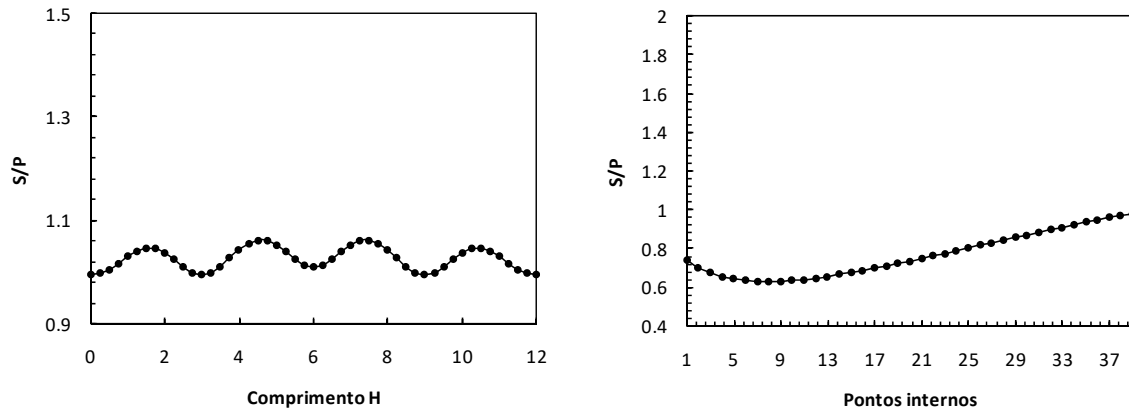


Fig. 10. Resultados para 3 orifícios.

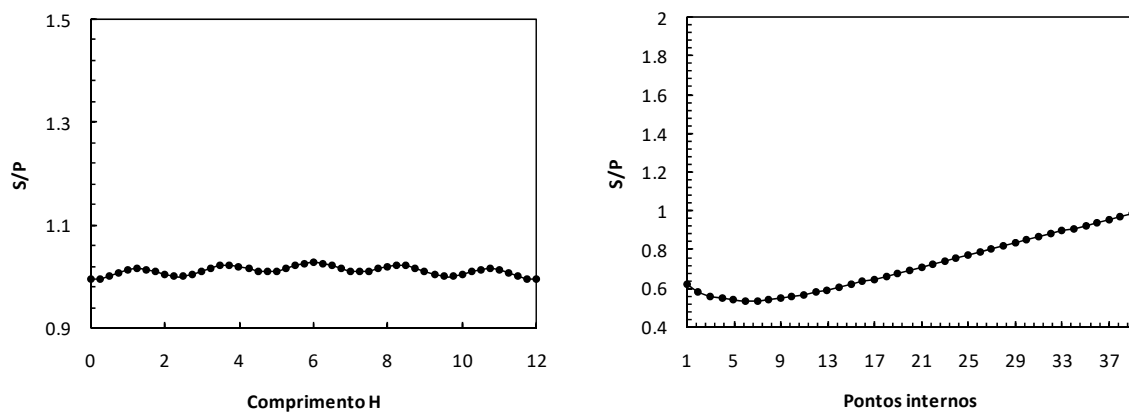


Fig. 11. Resultados para 4 orifícios.

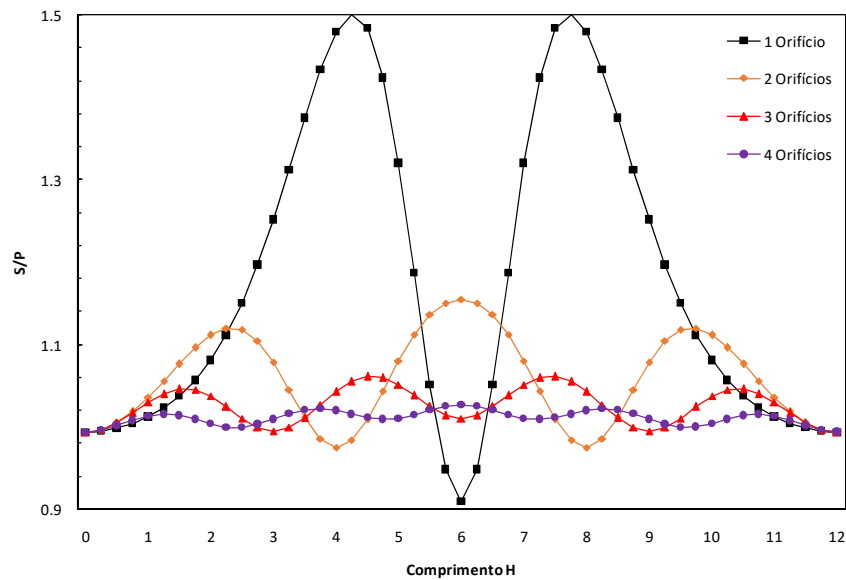


Fig. 12. Comparação dos resultados na superfície superior.

É apresentada a razão entre tensão e carga, S/P (tensão/carregamento), ao longo da superfície superior (H), em vermelho na Fig. 7, e também para os pontos internos, em verde na Fig. 7.

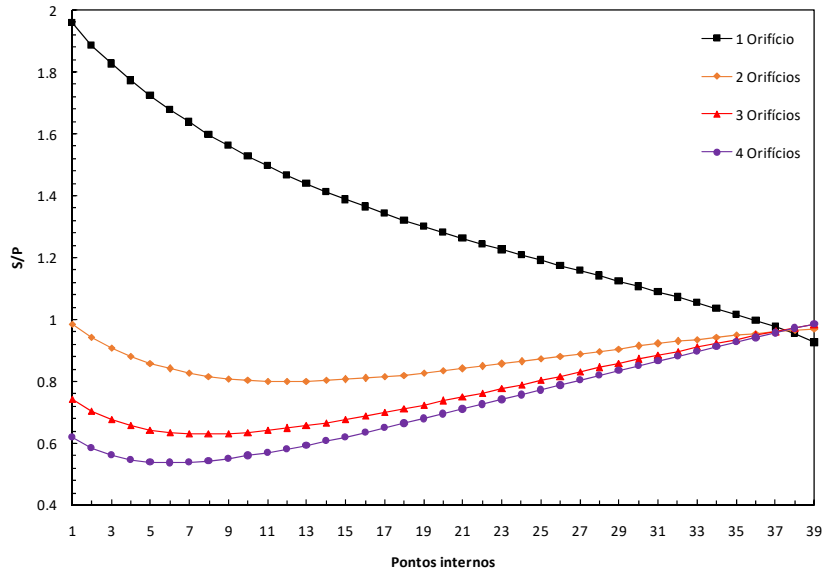


Fig. 13. Comparação dos resultados nos pontos internos.

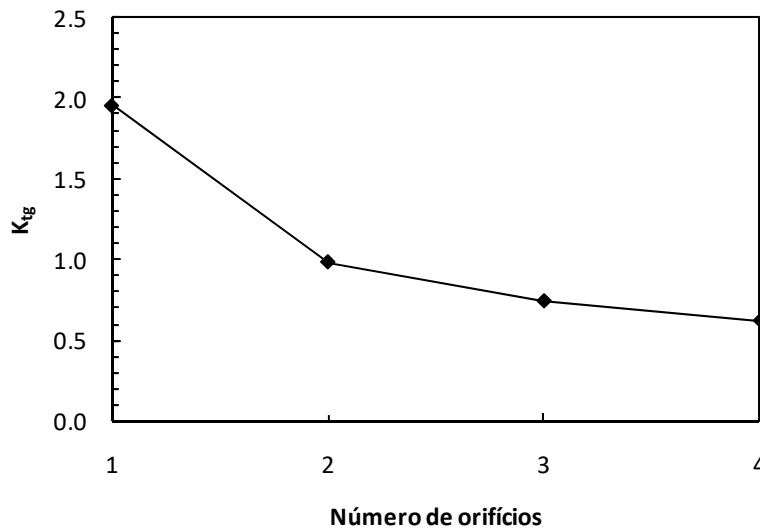


Fig. 14. Comparação do Fator de concentração de tensão.

Nota-se um comportamento esperado. A introdução de novos orifícios age dividindo a carga entre as seções resistentes resultantes, diminuindo a tensão máxima em cada caso. Na Fig. 14 fica claro a progressão do fator de concentração K_{tg} com a introdução de novos orifícios e mantendo a razão de área removida. Lembrando que, o fator de concentração K_{tg} é avaliado como a razão entre a tensão máxima (posição A mostrada na Fig. 3) e a tensão nominal, em local não afetado pelo entalhe (posição C mostrada na Fig. 3).

5. CONCLUSÕES

O recurso do método dos elementos de contorno aparece como mais um método numérico, capaz de reproduzir resultados desta natureza, envolvendo análise de concentração de tensões, de uma forma relativamente simples, que se torna a cada dia mais acessível e confiável. Neste trabalho é possível atestar sua precisão e fácil aplicação.

Há também observações interessantes a se fazer a partir dos resultados. O perfil da tensão na superfície superior apresenta mínimos na coordenada horizontal dos orifícios. Para o caso de dois ou mais orifícios, a ocorrência da tensão máxima ocorre na superfície da placa ao invés do orifício, apresentando ainda razão entre tensão e a carga maior que a unidade. Ressalta-se também que o perfil de tensão nos pontos internos se comporta similarmente entre os múltiplos orifícios, se comportando como o caso de orifício único. A tensão máxima diminui a medida que novos orifícios são introduzidos, de forma que o fator de concentração que compara a maior tensão atuante na peça, junto ao orifício, com o valor máximo nominal, relativamente distante do incidente geométrico, decresce para uma mesma razão de área removida. Reforçando, mais uma vez, o caráter atípico do problema de flexão em vigas com orifício circular, caso único em toda a casuística da mecânica dos sólidos.

Atenta-se novamente então ao cuidado que deve ser tomado ao se empregar estruturas que se equiparam aos modelos estudados. O conhecimento do comportamento dos perfis de tensão entre os casos apresentados então permite empregar geometria e material de maneira eficiente em estruturas e alcançar resultados satisfatórios em remoção de material de qualquer finalidade.

REFERÊNCIAS

- [1] Goodier, J.N., The Influence of Circular and Elliptical Holes on the Transverse Flexure of Elastic Plates, *Phil. Mag.*, 22, 69-80 (1936)
- [2] Ryan, J.J., Fischer, L.J., “Photoelastic analysis of stress concentration for beams in pure bending with a central hole”, *Journal of the Franklin Institute*, 225(5), 513-526 (1938)
- [3] Lo, C.C., Leissa, A.W., “Bending of Plates with Circular Holes”, *Acta Mechanica*, 4, 64-78 (1967)
- [4] Lee, C.W., Conlee, G.D., “Bending and twisting of thick plates with a circular hole”, *Journal of the Frankling Institute*, 285, 377-385 (1968)
- [5] Schijve, J., Fraga, W.E., Hewitt, R.L., “Comparison of an engineering estimate with a numerical solution for the stress concentration factor of a hole near a circular edge notch”, *International Journal of Fatigue*, 8(3), 111-118 (1986)
- [6] Bert, C.W., “Generalized Bending of a Large Plate Containing a Circular Hole”, *Mech. Res. Commun.*, 15(1), 55-60 (1988)
- [7] Pilkey, W.D., *Peterson’s stress concentration factors*, 2nd ed.. John Wiley and Sons: New York (1997)
- [8] Paloto, J.C., Santos, R.D., Dominguez, P., “Stress concentration factors for a circular hole in curved beams under bending loads”, *Blackwell Publishing Ltd j Strain*, 39, 27-30 (2003)
- [9] Kubair, D.V., Bhanu-Chandar, B., “Stress concentration factor due to a circular hole in functionally graded panels under uniaxial tension”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 50, 732-742 (2008)
- [10] Yang, Z., Kim, C.B., Beom, H.G., Cho, C., “The stress and strain concentrations of out-of-plane bending plate containing a circular hole”, *Int. J. Mech. Sci.*, 52, 836-846 (2010)
- [11] Kirsch, E.G., "Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre", *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, 42, 797-807 (1898)
- [12] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., *Teoria da elasticidade*. 3 ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois (1980)
- [13] Kang, J.H., “Exact solutions for stresses, strains, and displacements of a rectangular plate with an arbitrarily located circular hole subjected to in-plane bending moment”, *Int J Mech Sci*, 89: 482-486 (2014)
- [14] Woo, H.Y., Leissa, A.W., Kang, J.H., “Exact solutions for stresses, strains, displacements, and the stress concentration factors of a perforated rectangular plate by a circular hole subjected to in-plane bending moment on two opposite edges”, *J. Eng Mech*; 140(6), 1-8 (2014)
- [15] Frocht, M.M., Leven, M.M., “Factors of Stress Concentration for Slotted Bars in Tension and Bending”, *Journal of Applied Mechanics*, 18(1) (1951)
- [16] Brebbia, C.A., Walker, S., *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworths, London (1980)
- [17] Cheng, A.H.D., Cheng, D.T., Heritage and early history of the boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(3), 268-302 (2005)

- [18] Lara, L.O.C., Loeffler, C.F., Vera-Tudela, C.A.R., “Distribuição de Tensões em Placas com Orifícios Circulares Submetidas à Flexão”, *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*, **21**(2), 31-43 (2017)
- [19] Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., Wrobel, L.C., *Boundary Element Techniques*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg (1984)
- [20] Peterson, R.E., *Stress concentration factor*, New York: John Wiley and Sons (1974)

APPLICATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD TO STRESS ANALYSIS OF PLATES WITH MULTIPLE CIRCULAR HOLES IN PLANE BENDING

Abstract – The present work aims to study the stress distribution in plates with multiple circular holes, where an analytical or experimental solution aren't viable, due to their cost and complexity. Mesh and Gauss point convergence aren't included in the study. Numerous plates with different hole configurations are going to be analyzed. The results expected are stress distributions for the different configurations, pre-existing solutions comparisons and tendency curves that describe the distributions behavior in extreme cases.

Keywords – Stress concentration, Plate with multiple circular holes, Computational analysis of plates.